Modul 1 — Vektorer, Linjer, Plan, och Linjära ekvationer

Vektorer

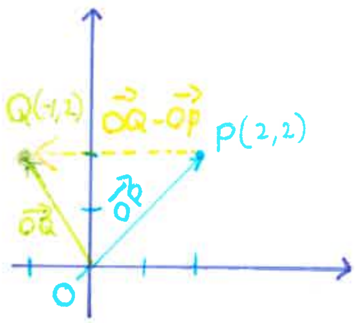
En vektor är en samling värden.
Samlingen kan 1, 2, 3 eller n diminsoner.

$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Kan interpreteras som att ha längd och riktning

Skalärer

Är ett värde som tillhör en mängd.
till exempel $5 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$



Längd av vektor

Längd av en n dimitionell vektor:

$$\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+\dots+n^2} = \text{en skalär}$$

Skalär multiplikation

En vektor kan multipliceras med en skalär för att få en längre, kortare eller motsatt vektor i samma riktning

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot 2 = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(-1) = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

Vektor addition

Två vektorer kan adderas för att få en ny vektor.

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{bmatrix}$$

Enhetsvektor

om $\|\vec{x}\|$ är 1 så kallas $\vec{x}$ en enhetsvektor.

$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}$ är en enhetsvektor
↳ $\vec{v} \neq \vec{0}$

Skalärprodukt

(dot product)

Skalärprodukt är definierat för två vektorer som:

$\vec{B} = \begin{bmatrix}B_1\\\vdots\\B_n\end{bmatrix}$ $\vec{A} = \begin{bmatrix}A_1\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = B_1A_1 + \dots + B_nA_n$

Dot product

eller

vinkel mellan A & B

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\cos(\theta)$

Från skalär produkten kan man härleda:

1) $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \iff$ vinkel $\hat{AVB} = 90°$ (AB är ortogonala)
2) $|\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|$
3) $\|\vec{U}+\vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$
4) $\vec{A}\cdot\vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

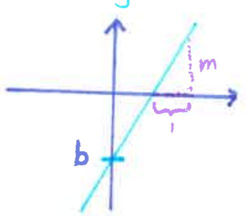
Linjer, skalär och parameterform

Skalärform:

$y = mx + b$

Y-intercept

Lutning



Kan också skrivas $Ay + Bx = C$
Funkar bara i $\mathbb{R}^2$

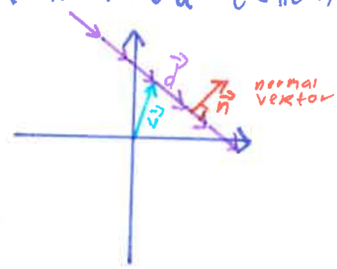
Skalär till parameter:

$$y = mx + b$$
$$\iff$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Parameterform:

(vektor form)

$\ell: \vec{x} = \vec{v} + t\cdot\vec{d} \quad t \in \mathbb{R} \quad \vec{v},\vec{d} \in \mathbb{R}^n$



Parameter till skalär:

en linje med normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ måste upfylla:

$$\vec{n}\cdot\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} - \vec{v}\right) = 0$$
$$\iff$$
$$Ax + By = Av_1 + Bv_2$$

Plan i $\mathbb{R}^3$

Skalärform:

Man behöver en normal vektor $\vec{n}$ till planet, och en punkt Q i planet.
Vi vet att alla vektorer från Q till en punkt p i planet är ortogonala mot $\vec{n}$

$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{PQ} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - Q_1 \\ x_2 - Q_2 \\ x_3 - Q_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = \underbrace{D}_{D = AQ_1 + BQ_2 + CQ_3}$$

Skalär till parameterform:

Man behöver 3 skilda godtyckliga punkter i planet:

t.ex. $p = (\frac{D}{A}, 0, 0)$, $q = (0, \frac{D}{B}, 0)$, $r = (0, 0, \frac{D}{C})$

Sedan bilda formen:

$$\vec{x} = \vec{op} + t \cdot \vec{pq} + s \cdot \vec{pr} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Parameterform: (vektorform)

Man behöver två vektorer i planet och en punkt i planet. Linjärt oberoende

$$\Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\vec{OQ}}_{\text{Punkt}} + t\underbrace{\vec{U}}_{\text{vektor 1}} + s\underbrace{\vec{V}}_{\text{vektor 2}} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

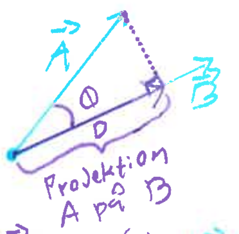
Parameter till skalär:

Hitta kryss produkten till $\vec{U}$ och $\vec{V}$ och ta skalär produkten av resultatet med vektorn $\vec{pQ}$ där $p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

senare del

$$(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \begin{bmatrix} x_1 - Q_1 \\ x_2 - Q_2 \\ x_3 - Q_3 \end{bmatrix} = 0$$

Projektion



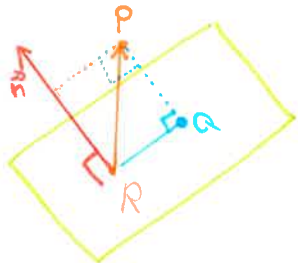
$\|\vec{D}\| = \cos(\theta) \cdot \|\vec{A}\|$

$= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|}$

$\vec{D} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \cdot \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|}$

$= \vec{B} \cdot \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}$

Från plan till punkt.



Projecera $\vec{RP}$ på $\vec{n}$

$\Rightarrow \frac{\vec{n} \cdot \vec{RP}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n} = \vec{QP}$

Modul 2 | Gauß-Elimination och Matrisaritmetik

Gauß-eliminering

Mål få fram trappstegsform
Row echelon form
REF

$$\underbrace{A_{n\times m}}_{}\quad n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & | & * \\ 0 & 0 & * & \ddots & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & | & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & | & * \end{bmatrix}}^{m}\right.$$

Reduced REF

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & * \end{bmatrix}$$

Matrisen är homogen om alla * i högerled är =0

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & | & 0 \\ * & * & \cdots & * & | & 0 \\ * & * & \cdots & * & | & 0 \end{bmatrix}$$

Man kan:

1. addera en multipel av en rad till en annan rad.
2. multiplicera en rad med en konstant.
3. byta plats på rader.

Rank av en matris

Maximala antalet linjärt oberoende vektorer i matrisen.
⇔ antalet ledande ettor i reducerad REF.

Matris Addition

Matriser måste ha samma dimensioner för att kunna adderas. (samma för subtraktion)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{pmatrix}$$

Matris multiplikation med skalär

En matris kan multipliceras med en skalär:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix}$$

Matris multiplikation med matris

Två matriser kan multipliceras med varandra endast om dimminsionerna uppfyller: $A_{mk} \cdot B_{kn} = C_{mn}$

Måste vara samma

OBS: $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\ 2\times 3$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1\cdot 1+4\cdot 2 & 2\cdot 1+5\cdot 2 & 3\cdot 1+6\cdot 2 \\ 1\cdot 3+4\cdot 4 & 2\cdot 3+5\cdot 4 & 3\cdot 3+6\cdot 4 \\ 1\cdot 5+4\cdot 6 & 2\cdot 5+5\cdot 6 & 3\cdot 5+6\cdot 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$

Enhetsmatrisen

Enhetsmatrisen är en matris $I_{n\times n}$ som uppfyller $A_{n\times n} \cdot I_{n\times n} = A_{n\times n} = I_{n\times n} \cdot A_{n\times n}$

$$I_{n\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n$$

Transponat

Transponat av en n.m matris ger en m.n matris.
Alla rader blir kolumner

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

det gäller: 1. $A = (A^T)^T$ 2. $(A+B)^T = A^T + B^T$

Matris invers

Om två $n \times n$ matriser A, B uppfyller:

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

gäller

$$A^{-1} = B \quad B^{-1} = A$$

Om A har ett A^{-1} så är A inverterbar annars är A singulär

en invers är unik.

Determinant

En determinant är en samling värden från en matris med egenskapen:

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ är inverterbar}$$

För 2×2 Matris så är determinanten definierad som:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = ad - bc$$

För 3×3 Matriser:

$$\det\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot \det\begin{pmatrix} E & F \\ H & I \end{pmatrix} \underset{\text{don't forget}}{-} B \cdot \det\begin{pmatrix} D & F \\ G & I \end{pmatrix} + C \cdot \det\begin{pmatrix} D & E \\ G & H \end{pmatrix}$$

Inverse för 2x2

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}_{\text{determinant}}} \cdot \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$$

Räkneregler

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$A \underset{\text{kan omformas till } I_n}{\sim} I_n \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existerar}$$

Inverse of 3x3

Lös till trappstegsform.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -14 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot \frac{1}{4} \\ \cdot -1 \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -14 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] 14$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \end{array}\right] \text{invers}$$

$$I_3 \qquad A^{-1}$$

Ekvationssystem och lösningar

$n<k$ 1) $n\{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$ ⇒ om konsistent finns ∞ lösningar

$n>k$ 2) $\overbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \end{bmatrix}}^{k=2} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$ ⇒ om kosistent:

$\text{rang}(A) = k \Rightarrow 1$ lösning

$\text{rang}(A) < k \Rightarrow \infty$ lösningar

$n=k$ 3) $\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$ ⇒ om kosistent:

$\text{rang}(A) = k \Rightarrow 1$ lösning

$\text{rang}(A) < k \Rightarrow \infty$ lösningar

Modul 3 | Delrum, Lösningsmängder, Linjärt oberoende

Linjärkombination

En linjärkombination är en summa av vektorer som är skalär multiplicerad:

$\vec{V} = c_1\vec{V}_1 + c_2\vec{V}_2 + c_3\vec{V}_3 \cdots c_n\vec{V}_n$

Spannet

Ett spann är alla linjärkombinationer av en mängd vektorer.

$\text{spann}(\vec{u}, \vec{v}) = c_1\vec{u} + c_2\vec{v} \quad \forall c_{1,2} \in \mathbb{R}$

i ett ekvationssystem gäller:

$$\begin{array}{ccc} c_1 c_2 \cdots c_n & \vec{x} & \vec{b} \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

$b \in \underbrace{\text{span}(c_1, c_2, \cdots c_n)}_{\text{Column space}}$

Delrum i $\mathbb{R}^2$

ett delrum i $\mathbb{R}^2$ är:
- Origo
- linje genom origo
- hela $\mathbb{R}^2$

Delrum i $\mathbb{R}^3$

ett delrum i $\mathbb{R}^2$ är:
- Origo
- linje genom origo
- Plan genom origo
- hela $\mathbb{R}^3$

Linjärt Oberoende

Om nollvektorn går att framställa med linjärkombinationer med minst en nollskild skalär $\Leftrightarrow$ linjärt beroende

$t \cdot \vec{v} + s\vec{u} + k\vec{w} = 0$

Homogena Ekvationssystem

Ett ekvationssystem där högerled är noll-vektorn

$\Rightarrow \vec{0}$ är : lösningsmängden

Delrum

Ett delrum är en mängd vektorer som uppfyller:

1) $\vec{0} \in V$
2) om $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$
3) $\vec{v} \in V \Rightarrow r\vec{v} \in V \quad \forall r \in \mathbb{R}$

vi säger V är sluten under addition och multiplikation med skalär.

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Kommutativ
b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ Assosiativ
c) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = 0 + \vec{v}$ noll element
d) $\vec{v} + -\vec{v} = 0$ invers element
e) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$ ... osv

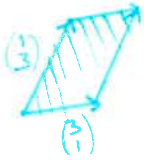
Ekvivalenta uttryck

Låt A vara en $n \times n$ Matris, då är det ekvivalent:

1) $A \sim I_n$
2) $\text{Rang}(A) = n$
3) A är inverterbar
4) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara $\vec{0}$ lösningen
5) $A\vec{x} = \vec{b}$ har exakt en lösning $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
6) Kolumnvektoren är linjärt oberoende
7) radvektorerna är linjärt oberoende
8) $\text{null}(A) = \{0\}$
9) $\text{col}(A) = \mathbb{R}^n$
10) $\text{Det}(A) \neq 0$

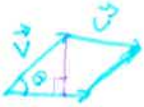
Area av parallellogram

given 2 vektorer i $\mathbb{R}^2$ så kan arean av de två vektorerna beräknas med determinanten.



$$A = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right| = |1\cdot1 - 3\cdot3| = 8$$

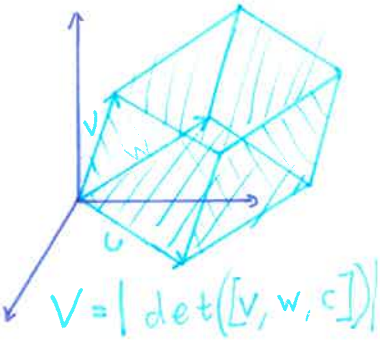
Alternativt:



$$A = h\cdot\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|\|\vec{U}\|\sin(\theta)$$

Volym av parallellepiped

given 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ så kan volymen av parallellipepeden som bildas beräknas med determinanten.



$$V = |\det([v, w, c])|$$

Determinant Triangelmatris

För triangelmatricer så är determinanten product av diagonalen

$$A = \begin{bmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = a\cdot b\cdot c$$

Determinant och Gauß

Radbyte: det byter tecken

Skalär mult rad: det mult. med samma skalär

Adderar rader: det oförändrad

Cofactor Matris

Cofactor matrisen är matrisen som bildas av en matris A med determinanten av submatriser.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}b & c\\ h & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a & c\\ g & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & b\\ g & h\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Adjugate Matris

Adjugat matrisen bildas av transponerade cofaktor-matrisen.

$$\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{cof}(A))^T$$

det gäller:

$$A\cdot \mathrm{cof}(A)^T = \det(A)\cdot I_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A\cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$$

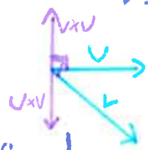
$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot \mathrm{adj}(A)$$

Cross Product

Kryss produkten är definierad för två vektorer i $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\ u_3v_1 - u_1v_3\\ u_1v_2 - u_2v_1\end{bmatrix}$$

det gäller att vektorn som bildas är ortogonal mot vektor u och v.



$$\vec{U}\times\vec{V} = -\vec{V}\times\vec{U}$$

Längden av kryss produkten är

$$\|\vec{U}\times\vec{V}\| = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\sin\theta$$

Som också är arean av parallellogramet

Det gäller också att kryssprodukten kan användas för att hitta volym av parallellpipeden som bildas av 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$

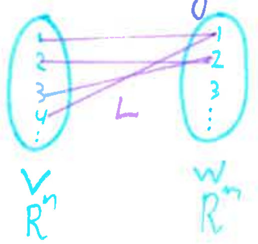
$$V = |(u\times v)\cdot w| = |\det(u, v, w)|$$

dot produkt

Modul 4 | Egenvärden, Linjära Avbildningar och geometri.

Linjära avbildningar

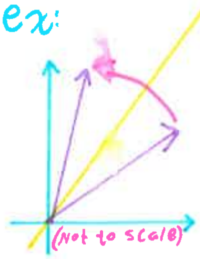
En trippel (L, V, W) med
L är avbildningsfunktionen
$L(x): V \to W$ och V och W
är definition, respektive
mål-mängd.



Linearitet:
$L(\vec{x}+\vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$
$L(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot L(\vec{x})$

Linjära avbildningar : $\mathbb{R}^n$ som uppfyller linearitet kan alltid representeras som $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ där A är en $m \times n$ matris.

ex:



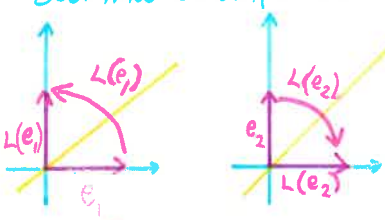
L är funktionen som speglar vektorer i $\mathbb{R}^2$ längs linjen $y = x$.

L kan beskrivas som
$L(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

Hur hittar man Avbildnings Matris?

Jämnför hur basvektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ förändras.

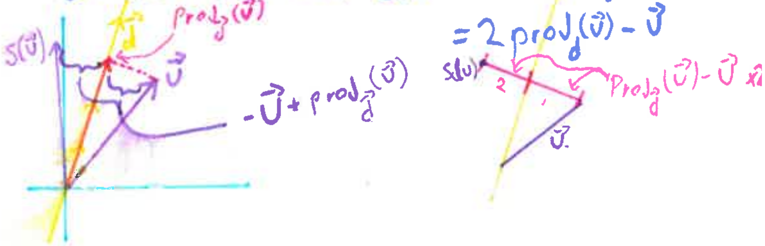
Samma exempel som förut:



$$\Rightarrow \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

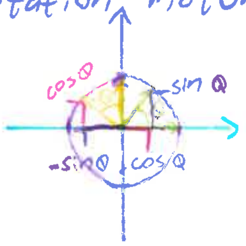
Speglin runt linjer (genom origo)

Spegling runt linjen $l: \vec{x} = t\vec{d}$
är definierad som $S(\vec{u}) = \vec{u} + 2(\text{proj}_{\vec{d}}(\vec{u}) - \vec{u})$
$= 2\,\text{proj}_{\vec{d}}(\vec{u}) - \vec{u}$



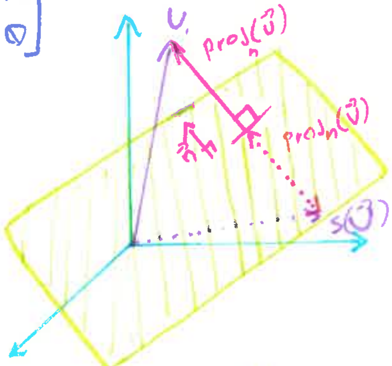
Rotationer i $\mathbb{R}^2$

Det gäller att matrisen för en rotation moturs i $\mathbb{R}^2$ är: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$



Spegling genom plan (som går genom origo)

Spegling runt plan med normalvektorn $\vec{n}$ ges av formeln: $S(\vec{u}) = \vec{u} - 2\,\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{u})$



Avbildning Sammansättning och Invers

Om:
$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av A
$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ ges av B
så är $f \circ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
och ges av BA

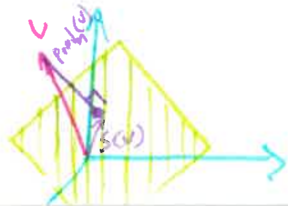
$\Rightarrow f \circ g(\vec{u}) = B(A\vec{u})$
$= (BA)\vec{u}$

Om:
$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ges av A
så existerar T^{-1} om och endast om A^{-1} existerar.

$\Rightarrow T^{-1}(d) = A^{-1}(d)$
$T(d) = A(d)$
$T^{-1}(T(d)) = A^{-1}Ad$
$= d$

Projektion på plan

Projektioner på plan är nästan som spegling genom plan fast vektorn från $\vec{u}$ går bara halvvägs i rikning mot planet. Alltså är formeln:
$S(\vec{u}) = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{u})$



Egenvärden

given en funktion $T_A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med matrisen $A_{n\times n}$ om:

$T_A(\vec v)=\lambda \vec v$ $\quad v\in\mathbb{R}^n$ $\lambda\in\mathbb{R}$

Då är $\vec v$ en egenvektor och λ är $\vec v$s egenvärde

Nollrum (kernel)

Nollrum till en linjär avbildning $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ är mängden element från $\mathbb{R}^n$ som A avbildar på $\vec 0$

$N=\{\vec x \mid A(\vec x)=\vec 0\}$

$N=null(A)$, $\quad N=ker(A)$

Det gäller att $\vec 0$ alltid tillhör N

Nullity

The nullity är dimensionen av nollrummet. I stort sett antalet vektorer i nollrummet.

Surjektiv

En linjär avbildning $T:R^n\to R^m$ är surjektiv om alla R^m är avbildad på

$\forall \vec y\in R^m \quad \exists \vec x\in R^n$ med $T(\vec x)=\vec y$

Injektiv

En linjär avbildning $T:R^n\to R^m$ är injektiv om alla element avbildas på ett unikt element i R^m

$\forall \vec u,\vec v\in R^n$ med $\vec u\neq\vec v$ så gäller

$T(\vec u)\neq T(\vec v)$

Injektiv $\iff Ker(T)=\{\vec 0\}$

$R^n\to R^n \wedge$ surjektiv $\iff$ injektiv

$R^n\to R^n \wedge$ injektiv $\iff$ surjektiv

Karaktäristiska Matrisen

Med formeln för egenvektorerna kan man omformulera för att hitta en vektor för ett givet egenvärde:

$A\vec v=\lambda\vec v \iff A\vec v-\lambda\vec v=0 \iff (A-\lambda I_n)\vec v=0$

$\Rightarrow \vec v$ är nollskild $\iff \det(A-\lambda I_n)=0$

Bildrum

Bildrum av linjär avbildning $A:R^n\to R^m$ är alla element från R^m som något element från R^n avbildar på.

$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $\quad \vec x\in\mathbb{R}^m$

$B=\{\vec y \mid A(\vec x)=y$ för något $\vec x\in\mathbb{R}^n\}$

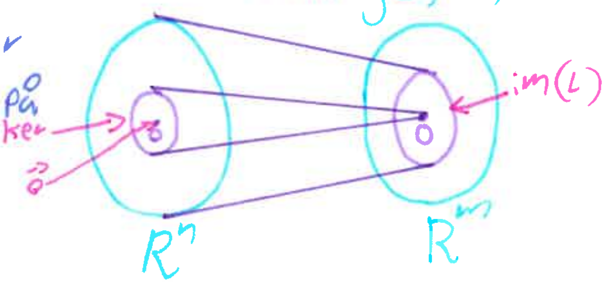
Range(A)=B $\quad$ Im(A)=B

Dimensionsatsen (Rangsatsen)

Det gäller för avbildningen $L:R^n\to R^m$ att $\dim(Ker(L))+\dim(Im(L))=n$

"om man avbildar på en lägre dim så ökar dim av kerneln."

$Rank(L)+nullity(L)=n$



Bijektiv

En linjär avbildning T är bijektiv om den är både surjektiv och injektiv.

En bijektiv avbildning har alltid en invers.

Bijektiv existerar bara för $T:R^n\to R^n$

Modul 5 Baser, Ortonormalitet, Projektioner och minstakvadratmetoden

Bas

En bas av ett delrum $V \subset R^n$ består av en mängd vektorer $v_1, v_2, v_3 \cdots v_r \in V$ så att de spänner upp hela V och de är linjärt oberoende

Varje delrum har en bas

Alla baser för samma delrum har lika många element.

dim av ett delrum är antalet vektorer i basen.

För en bas kan varje vektor $\vec{w}$ skrivas på ett unikt sätt av kombinationer av basen.

$$\vec{w} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n$$

som skrivs som

$$[\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}_B$$

där B är basen $\{v_1, v_2 \dots\}$

Hittas genom att lösa equationssystem

Hitta en Bas

given ett span av vektorer, kan man ta bort linjärt beroende vektoren tills det bara finns linjärt oberoende vektorer kvar.

Detta kan göras med gauß.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{span}(\text{col}(A))} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

span(col(A)) basen.

Ortonormal (on)

En bas är ortogonal om alla vinklar mellan vektorerna i basen är 90° grader.

En bas är ortonormal om den är ortogonal och alla vektorer har längd 1.

Ortonormalitet ~~⟺~~ ⟹ Linjärt oberoende (gäller bara i en riktning)

Det gäller:

$$V_{ortonormal} = \{v_1, v_2, v_3 \dots\}$$

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \quad v_2 \cdot v_3 = 0 \quad v_1 \cdot v_3 = 0 \dots$$

Ortogonala operationer

en operation $T(x): R^n \to R^n$ är ortogonal ifall

bevarad längd $\|T(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x}$

bevarad skalärprodukt $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$

bevarar vinklar.

det gäller också:

$$A^{-1} = A^T$$

Sammanfattning

1) bas spänner upp delrum och är linjärt oberoende.
2) Dimension = # basvektorer
3) Koordinater hittas med hjälp av lösningssystem
4) Pivot Kolumner ger bas för kolumnrum
5) $Rank(A) + nullity(A) = n$ för $A \in m \times n$ matris

Projektion i standardbasen

Det gäller för standardvektorerna e_1, e_2, e_3 att:

$$\text{Proj}_{\vec{e}_1}\vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{e}}{\|\vec{e}\|^2}\vec{e} = (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 = \underbrace{x_1}_{\text{komponent ett}} e_1$$

Det gäller också:

$$x_n = e_n \cdot \vec{x}$$

n komponent.

Basbytematris

Matrisen $P_B = P_{B\to S}$ är matrisen som för vektorer från basen B till standardbasen. $B = \{v_1, v_2, v_3 \cdots v_n\}$

$$[\vec{w}]_S = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \underbrace{[v_1, v_2 \cdots v_n]}_{P_{B\to S}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[\vec{w}]_B}$$

Det gäller

$$P_{S\to B} = (P_{B\to S})^{-1} \overset{\text{bara för ON bas}}{=} (P_{B\to S})^T$$

Ortogonal kompliment

Ortogonal kompliment till vektorn V är alla vektorer som är ortogonala mot V. Betecknas med:

kan vara en mängd vektorer

$V^\perp$ = mängd av vektorer ortogonal mot V

alla vektorer i

Projektionssatsen:

V är delrum till $\mathbb{R}^n$ då kan varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ skrivas på ett unikt sätt som:

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{w} \quad \vec{v} \in V,\ \vec{w} \in V^\perp$$

skrivs som:

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$$

Summa av vektorer i V ligger i V

summa av vektorer i $V^\perp$ ligger i $V^\perp$

Koordinater i ON

Vi vet att med en ON bas $v_1 \cdots v_n$ går det att skriva vektor $\vec{x}$

$$\vec{x} = a_1v_1 + a_2v_2 \cdots a_nv_n$$

Men det går också att skriva som:

$$\vec{x} = (\vec{x}\cdot v_1)v_1 + (x\cdot v_2)v_2 + \dots + (\vec{x}\cdot v_n)v_n$$

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{v}_i = a_i$$

Ortogonala matriser

En matris A är ortogonal om och endast om $A^{-1} = A^T$. Detta gäller om kolumn/rad vektorerna är ortonormala (ON)

$\Rightarrow$ ON bas har ortogonal basbytematris

Det gäller också för ortogonal T:

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$ A är ortogonal matris

$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = T(\vec{x})\cdot T(\vec{y}) \quad \forall x, y$

$\Rightarrow \|T(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$

$\Rightarrow A$ har $\det = -1$ eller 1

Basbyte mellan två baser

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ $B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$[\vec{x}]_A = P_{B\to A}([\vec{x}]_B)$$

$$P_{B\to C} = \left[[b_1]_C\ [b_2]_C\ [b_3]_C\right]$$

$$\Rightarrow [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \mid \vec{b}_1\ \vec{b}_2] \sim [I_n \mid P_{B\to C}]$$

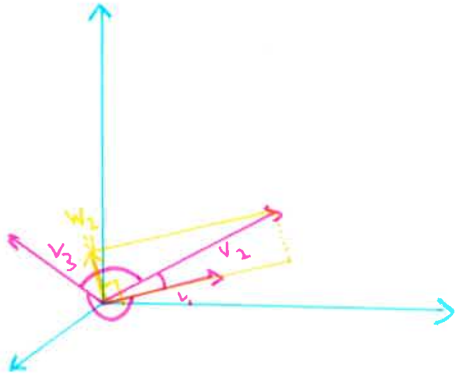
$$\Rightarrow P_{B\to C} = (P_{C\to B})^{-1}$$

$\Rightarrow$ B och C ortonormala $\Rightarrow P_{B\to C}$ ortogonal

Gram-schmidts Metod

Bevisar och hittar att alla delrum har en ON bas:

given $Bas(V) = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_k\} \quad V \subset \mathbb{R}^n$



1) lät $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ eller annan godtycklig vektor i V

2) lät $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - proj_{w_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2}\vec{w}_1$

3) lät $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - proj_{w_1}(\vec{v}_3) - proj_{w_2}(\vec{v}_3)$

$$= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|^2}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} w_2$$

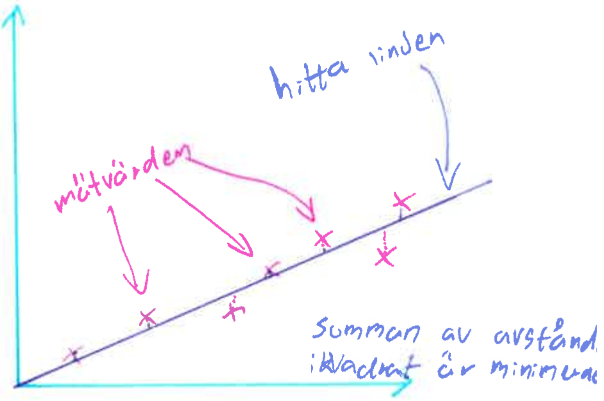
Följ steg 2,3 för varje vektor $\vec{v}_n$ i basen av V.

4) W är nu en ortogonal bas. dela varje vektor med sin längd för att få en ON bas.

Minsta kvadrat metoden

MKM används för att hita passande aproximerade variabler i ett överbestämt ekvationssystem.

$ax + by = c$
$dx + ey = f$
$gx + hy = i$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

detta system kan vara överbestämt.

Multiplicera med A^T från vänster

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+d^2+g^2 & ab+de+gh \\ ab+de+gh & b^2+e^2+h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+df+gi \\ bc+ef+hi \end{bmatrix}$$

Detta system har en lösning för x,y som då är den aproximerade lösningen med minsta kvadrat metoden.

Hitta felet för MKM:

efter att man hittat $x, y \dots z$ kan man stoppa in det i den originella ekvationen och räkna ut skillnaden mellan:

$ax + by = Q_1 \qquad fel = (Q_1 - c)^2$
$dx + ey = Q_2 \qquad fel = (Q_2 - f)^2 \quad$ osv

det är summan av alla fel som är minimerat.

Modul 6 Diagonalisering och abstrakta Vektorrum

Hitta egenvärden

Egenvärden kan användas för diagonalisering och hittas med hjälp av determinanten.

$A \in M^{n \times n}$ med egenvärde λ

då gäller:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$ ← Karakteristiska ekvationen.

från detta kan en polynom av graden dim(A) utlösas som kan hitta värdena för λ

Hitta egenrum

Egenrum är kernel av den Karakteristiska matrisen för ett givet egenvärde. $(A - I\lambda)\vec{v} = 0$

DVS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11}-\lambda & A_{1k} & A_{1n} & 0 \\ \vdots & A_{kk}-\lambda & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Egenrumet är lösningsmängden för matrisen.

Hitta egenvektor

en egenvektor är alla individa, nollskillda vektorer i vektorrummet.

Multiplicitet

Algebraisk multiplicitet:
Hur många gånger λ är en rot av den karakteristiska polynom.

eg: $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \cdot \lambda^1$

$\Rightarrow \lambda = 2$ har alg. mult. = 2

$\lambda = 0$ har alg. mult = 1

Geometrisk multiplicitet:
Är dimensionen av lösningsmengden av den karakteristiska matrisen för ett λ.

eg $\lambda = 2$

$\dim(\ker(A - 2I)) = 1$

$\Rightarrow \lambda = 2$ har geo. mult. = 1

$\lambda = 0$

$\dim(\ker(A)) = 1$

$\lambda = 0$ har geo. mult = 1

Det gäller att alg. mult $\geq$ geo. mult,

Produkt av egenvärden för $A = \det(A)$
summa av egenvärden för $A = \text{trace}(A)$
↳ som också är summan av diagonalen.

Diagonalisering

Med hjälp av basbyte kan en funktionsmatris bli skriven på ett diagonalt sätt med hjälp av formeln $A = PDP^{-1}$ där D är en diagonalmatris och P respektive P^{-1} är basbyte matriser.

det gäller $A = PDP^{-1}$ $P = P_{B \to S}$ $[A]_B = D$ A och D är similära

Similära matriser

- samma determinant
- samma karakteristiska polynom
- samma egenvärden med multiplicitet
- samma rang

Alla matriser $A \in M_{n \times n}$ är diagonaliserbara omm A har n L.O. egenvektorer.

Ekvivilenta uttryck:

- A är diagonaliserbar
- A har n linjärt oberoende egenvektorer
- $\mathbb{R}^n$ spänns upp av As egenvektorer
- summa av geometrisk multiplicitet = n
- geometrisk multiplitet av egenvektorerna är samma som Algebraisk multiplicitet.

Hur diagonaliserar man?

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1) hitta egenvärden:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow \lambda = 3, 1$

2) Bilda bas av egenvektorer (om möjligt)

$\lambda = 1$:

$(A - I)\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow$

$\vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$:

$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow$

$\vec{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ bas av egenvektorer $= \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

3) $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ $\quad P = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

När är A Diagonaliserbar

- egenvektorer bildar bas
- A har n linjärt oberoende egenvektorer
- algebraisk multiplicitet = geometrisk multiplicitet $\forall \lambda$

Ortogonal diagonalisering

A är ortogonalt diagonaliserbar om det kan bildas en ON bas av egenvektorer.

Det gäller:

A ortogonal diagonaliserbar $\Leftrightarrow A = A^T$

$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^T$

Ekvivalent för symetriska matriser:

1 alla egenvärden och vektorer är reella

2 egenvektorer för olika egenvärden är ortogonala

3 De kan alltid diagonaliseras

4 egenvektorer kan bilda ON bas

5 $D = P^TAP$

Tillämpning av symetrisk diagonal:

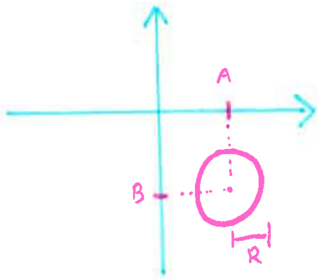
A^{100} är svårt att räkna ut.

$$A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \ldots PDP^{-1}$$
$$= PD\cancel{P^{-1}P}D\cancel{P^{-1}P}D \ldots DP^{-1}$$
$$= PD^{100}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix} a^{100} & 0 \\ 0 & b^{100} \end{bmatrix}P^{-1}$$

Lätt att räkna

Geometri: upprepning

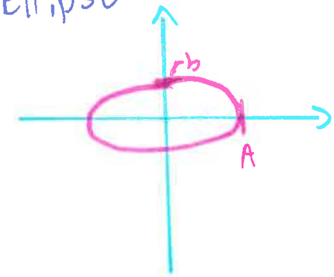
Cirkel



Beskrivs av:

$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2$

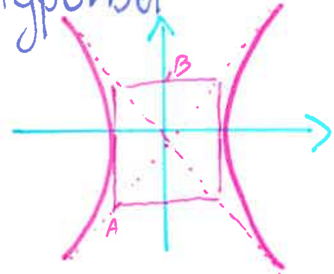
Ellipse



Beskrivs av:

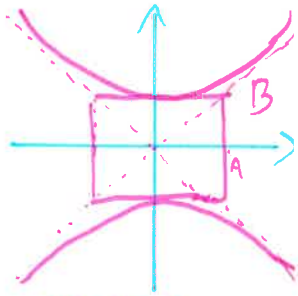
$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$

Hyperbel



Beskrivs av:

$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$



Beskrivs av:

$\frac{y^2}{B^2}-\frac{x^2}{A^2}=1$

Kvadratiska former

Summa av två olika polynomer med annorlunda variabel men med samma grad. Graden måste vara 2.

T.ex:

$P_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

$P_2(x_1,x_2)=x_1+x_2$

$P_3(x_1,x_2,x_3)=x_3^2+x_3x_2+x_2^2+x_1^2$

Med hjälp av diagonalisering kan kvadratiska former omvandlas till en cirkel, ellipse eller hyperbel efter basbytén.

Positivt & Negativt definit

en kvadratisk form $Q(x..)$ är:

Positivt definit om: $Q(x)>0 \quad \forall x\neq 0$

Negativt definit om: $Q(x)<0 \quad \forall x\neq 0$

Positivt/negativt semidefinit om: $Q(x)\geq 0 \quad Q(x)\leq 0$

indefinit om: $Q(x)>0 \ \wedge \ Q(x)<0$ för något x

Kvadratisk form som matris (2×2)

I allmänhet så gäller:

$ax^2+bxy+cy^2=[x\ y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\vec{x}^T A\vec{x}$

Genom att diagonalisera A kan vi hitta en ny formel för Q i en annan bas som följer formen för cirkel, ellipse eller hyperbel.

Det ger:

$Q(x)=\underbrace{[\vec{x}]P}_{(\vec{u})^T}\underbrace{DP^T}_{A}\underbrace{[\vec{x}]}_{U}$

Kvadratisk form som matris (3×3)

I allmänhet gäller:

$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$

$=[x\ y\ z]\begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Diagonalen på D är egenvärden.

om alla egenvärden är:

positiva $\Rightarrow$ Q positiv definit

negativa $\Rightarrow$ Q negativt definit

olika tecken $\Rightarrow$ Q indefinit.